

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية
الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

الدورة: 2026

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

الشعبة: تقني رياضي

المدة: 04 سا و 30 د

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتين:
الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

(1) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 2u_n + 3n + 4$

أ) احسب u_1 ، u_2

ب) برهن بالتراجع أنه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq 3n + 1$ ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n)

ج) حدّد اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

(2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln(u_n + 3n + 7)$

أ) أثبت أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\ln 2$ ، يُطلب حساب حدّها الأول.

ب) اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج أنّ: $u_n = 8 \times 2^n - 3n - 7$

(3) نضع: من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

- احسب S_n بدلالة n ثم بيّن أنّ: $T_n = 2^{n+4} - \frac{3}{2}n^2 - \frac{17}{2}n - 15$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 10 كريّات متماثلة ولا نفرّق بينها باللمس، منها: كريّتان بيضاوان مرقّمتان بـ: 0 ، 2

وأربع كريّات حمراء مرقّمة بـ: 0 ، 1 ، 2 ، 3 وأربع كريّات خضراء مرقّمة بـ: 1 ، 2 ، 3 ، 4

نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كريّات في آن واحد ونعتبر الحوادث:

A: « سحب كريّة حمراء على الأقل » ، B: « سحب ثلاث كريّات جداء أرقامها معدوم »

C: « سحب ثلاث كريّات من نفس اللون » ، D: « سحب ثلاث كريّات مجموع أرقامها أكبر من أو يساوي 8 »

(1) أ) احسب $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(C)$ احتمالات الحوادث A ، B و C على الترتيب.

ب) بيّن أنّ: $P(D) = \frac{17}{120}$ وأنّ: $P(C \cap D) = \frac{1}{60}$

ج) استنتج حساب احتمال الحادثة E: « سحب ثلاث كريّات مجموع أرقامها أصغر من أو يساوي 7 »

(2) المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكلّ عملية سحب لثلاث كريّات، عدد الكريّات التي تحمل رقما فرديا.

- عيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- (1) نعتبر المعادلة $(E) \dots 11x - 5y = 7$ ذات المجهولين الصحيحين x و y
 (أ) بين أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلاً للمعادلة (E) فإن $y \equiv 3[11]$ ثم حل المعادلة (E)
 (ب) عيّن الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق: $|y - x| \leq 5$
 (2) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع: $a = 11n + 3$ ، $b = 5n + 2$ و $PGCD(a; b) = d$
 (أ) ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟
 (ب) عيّن الثنائيات $(a; b)$ التي من أجلها يكون $d = 7$
 (3) (أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 11
 (ب) استنتج أنه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $a^b \equiv 9[11]$ ،
 (ج) عيّن قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون $3^{1447} + a^b + a - b - 9 \equiv 0[11]$ و $2015 < n < 2037$
 (4) λ عدد طبيعي يُكتب $\overline{5623}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7 ، اكتب λ في نظام التعداد ذي الأساس 6

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 1 + (1 - x - x^2)e^{-x}$ و (c_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$
 (1) (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
 (ب) بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ثم فسّر النتيجة هندسياً.
 (2) (أ) بين أنه: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = (x^2 - x - 2)e^{-x}$ ،
 (ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.
 (3) أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]-1, 7[$
 (4) (أ) عيّن معادلة لـ (T) مماس المنحني (c_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0
 (ب) احسب $f(-2)$ ثم ارسم (T) و (c_f)
 (ج) عيّن بياناً قيم العدد الحقيقي m حتى يكون للمعادلة: $f(x) = m$ حلان سالبان تماماً.
 (5) (أ) تحقق أن الدالة $H: x \mapsto (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$ أصلية للدالة $h: x \mapsto (1 - x - x^2)e^{-x}$ على $\mathbb{R}$
 (ب) $\mathcal{A}(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحني (c_f) والمستقيمات التي معادلاتها:

$$x=0 \text{ و } x=\alpha , y=0$$

- احسب $\mathcal{A}(\alpha)$ ثم بين أن: $\mathcal{A}(\alpha) = \frac{4 + \alpha^3}{1 - \alpha - \alpha^2}$ ، $\mathcal{A}(\alpha)$ مقدرة بوحدة المساحة.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

(1) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_n - 3 \times 2^n$ ،
- احسب u_1 ، u_2 ثم حدّد اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

(2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{u_n}{2^n} + 3$

(أ) أثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يُطلب تعيين حدّها الأول.

(ب) اكتب v_n بدلالة n ثم بيّن أنّ: $u_n = 4 - 3 \times 2^n$

(3) نضع: من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

(أ) احسب S_n بدلالة n ثم استنتج نهاية S_n

(ب) بيّن أنّه: من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $T_n = 4n + 7 - 6 \times 2^n$

(ج) احسب بدلالة n المجموع L_n حيث: $L_n = T_0 + T_1 + \dots + T_n$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 11 كرتة متماثلة ولا نفرّق بينها باللمس، منها:

كريّتان بيضاوان، خمس كريّات حمراء، ثلاث كريّات خضراء وكريّة واحدة سوداء.

(1) نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كريّات على التوالي دون إرجاع ونعتبر الحوادث:

A : « سحب ثلاث كريّات من نفس اللون » ، B : « سحب كريّة واحدة بيضاء فقط »

C : « سحب كريّة حمراء على الأكثر » ، D : « سحب كريّتين حمراوين على الأقل »

(أ) احسب $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(C)$ و $P(D)$ احتمالات الحوادث A ، B ، C و D على الترتيب.

(ب) بيّن أنّ: $P(A \cap D) = \frac{2}{33}$ ثم استنتج حساب $P(A \cup D)$

(2) نفرض أنّ عدد الكريّات السوداء في الكيس هو n حيث: $n \geq 2$ ونسحب منه كريّتين على التوالي مع الإرجاع.

- عيّن قيمة n حتى يكون احتمال سحب كريّتين سوداوين يساوي $\frac{1}{4}$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(1) (أ) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد 1447 على 7 وباقي القسمة الإقليدية للعدد 2687 على 13

(ب) برّر أنّ العدد 1447 أولي ثم عيّن القواسم الطبيعية للعدد 2894

(ج) جد الثنائيات $(x; y)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقّق: $x(x + y) = 2894$

(2) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع: $a = 7n + 5$ ، $b = 13n + 9$ و $\text{PGCD}(a; b) = d$

- عيّن القيم الممكنة للعدد d ثم حدّد قيم n التي من أجلها يكون $d = 2$

(3) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع: $A = 14n^2 + 17n + 5$ و $B = 26n^2 + 31n + 9$

(أ) بين أن العدد $(2n+1)$ يقسم كلا من العددين A و B

(ب) استنتج بدلالة n وحسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B

(4) من أجل $d = 1$ ، احسب بدلالة n المضاعف المشترك الأصغر للعددين A و B

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة المعرفة على $]0; e[\cup]e; +\infty[$ بـ: $f(x) = x + \frac{1}{x - x \ln x}$ و (c_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) (أ) احسب النهايات: $\lim_{x \rightarrow e} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow e} f(x)$ ، فسر النتائج هندسياً.

(ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) (أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = x$ مقارب مائل لـ (c_f)

(ب) ادرس الوضع النسبي لـ (c_f) و (Δ)

(3) (أ) بين أنه: من أجل كل x من $]0; e[\cup]e; +\infty[$ ، $f'(x) = 1 + \frac{\ln x}{(x - x \ln x)^2}$

x	0	α	e	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+

(ب) نقبل أن إشارة $f'(x)$ موضحة في الجدول المقابل

- تحقق أن $0,4 < \alpha < 0,5$

(ج) شكّل جدول تغيّرات الدالة f

(4) (أ) بين أن (c_f) يقبل مماساً (T) يوازي (Δ) ، يُطلب تعيين معادلة له.

(ب) أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً β في المجال $]3; 3,1[$

(5) (أ) ارسم (Δ) ، (T) و (c_f) (نأخذ: $f(\alpha) \simeq 1,7$)

(ب) ناقش بياناً وحسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $m(x - x \ln x) = 1$

(6) h الدالة المعرفة على $]0; e[$ بـ: $h(x) = \ln(1 - \ln x)$

- احسب $h'(x)$ ثم استنتج حساب $\mathcal{A}$ مساحة الحيز المستوي المحدّد بـ (c_f) والمستقيمات التي معادلاتها:

$$x = 1 \text{ و } x = \frac{1}{e}, \quad y = x$$