



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

يحتوي الموضوع الأول على (03) صفحات (من الصفحة 1 من 6 إلى الصفحة 3 من 6)

التمرين الأول: (04 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty; 1[$ بـ :

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

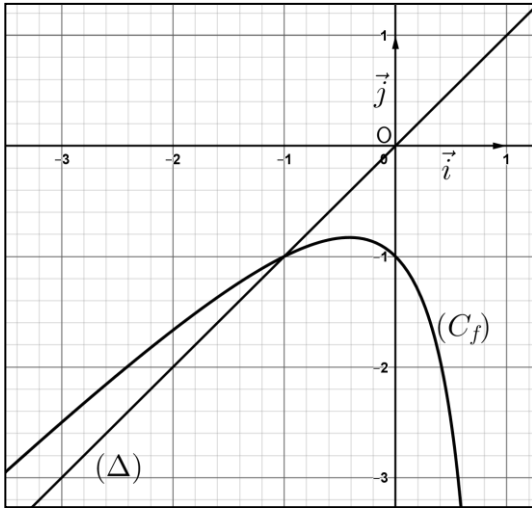
(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحددها الاول $u_0 = -3$

ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى

المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و (Δ) هو المستقيم ذو

المعادلة $y = x$ (أنظر الشكل المقابل).



(1) أعد رسم الشكل على ورقة الاجابة ثم مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها مبرزا

خطوط التمثيل، أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-3 \leq u_n < -1$

(3) أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} + 1 \geq \frac{3}{4}(u_n + 1)$

ب. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n + 1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ثم $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) نضع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < (u_0 + 1) + (u_1 + 1) + \dots + (u_n + 1) \leq 8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1\right]$

واستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقطتين $A(1;1;3)$ و $B(1;0;2)$.

(1) أ) بيّن أنّ النقط O ، A و B ليست في استقامية.

ب) تحقق أنّ $\vec{n}(2;1;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (OAB) ثم عيّن معادلة ديكارتية له.

(2) لتكن (Δ) مجموعة النقط M من الفضاء التي إحداثياتها $(x;y;z)$ وتحقق المعادلة التالية:

$$(2x+2y+6z-11)^2 + (2x+4z-5)^2 = 0$$

- بيّن أنّ المجموعة (Δ) هي تقاطع المستويين المحوريين للقطعتين $[OA]$ و $[OB]$ ، ثم عين تمثيلا وسيطيا للمجموعة (Δ) .

(3) لتكن M نقطة كيفية من الفضاء

- برهن صحة التكافؤ التالي: $(M \in (\Delta))$ يكافئ $(OM = AM = BM)$ ثم استنتج إحداثيات النقطة Ω مركز الدائرة المحيطة بالمثلث OAB .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، θ عدد حقيقي من المجال $]-\pi; \pi]$

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$(z^2 - 2z + 2)(z^2 - 2(\sin \theta)z + 1) = 0$$

II. A ، B ، C و D نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب

$$z_D = \overline{z_C} \text{ و } z_C = \sin \theta + i \cos \theta \text{ ، } z_B = 1 - i \text{ ، } z_A = -\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} \text{ (يرمز } \bar{z}_c \text{ الى مرافق } z_c \text{)}$$

(1) اكتب الأعداد z_D ، z_C ، z_B ، z_A على الشكل الأسّي.

(2) E نقطة من المستوي لاحقتها z_E حيث $z_E = \frac{z_A}{z_B}$.

- بيّن أن النقط C ، D و E تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

(3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة A و زاويته $\frac{\pi}{4}$ ونسبته $(2\sqrt{2}-2)$.

- عيّن قيمة θ حتى تكون النقطة B صورة النقطة C بالتشابه المباشر S .

(4) نضع $\theta = \frac{-3\pi}{4}$. عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد $(z_D)^n$ تخيليا صرفا.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

$$\begin{cases} f(x) = x + 1 - \frac{1}{\ln x}; & x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\} \\ f(0) = 1 \end{cases} \quad f \text{ الدالة العددية المعرفة على } [0;1[\cup]1;+\infty[: \text{ب}$$

(يرمز بـ $\ln$ الى اللوغاريتم النيبيري)

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ/ بيّن أنّ f مستمرة عند 0 بقيم أكبر.

ب/ احسب $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

(2) أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

ب/ ادرس اتجاه تغيير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) يطلب تعيين معادلة له ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى (Δ).

(4) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة ω فاصلتها α حيث $1,49 < \alpha < 1,5$

ثم بيّن أنّ معادلة المماس للمنحنى (C_f) في النقطة ω تكتب على الشكل $y = \left(\alpha + 3 + \frac{1}{\alpha} \right) (x - \alpha)$

(5) ارسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f).

(6) h الدالة العددية المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بـ : $h(x) = 1 - x + x \ln x$.

أ/ بيّن أنّ الدالة h متزايدة تماما على المجال $[1; +\infty[$ و استنتج إشارة $h(x)$ على المجال $[1; +\infty[$.

ب/ بيّن أنّه من أجل كل $x > 1$: $f(x) - x + \frac{1}{x \ln x} = \frac{h(x)}{x \ln x}$

و استنتج أنّه من أجل $x > 1$: $x - \frac{1}{x \ln x} < f(x) < x + 1$

(7) $\mathcal{A}$ مساحة الحيز من المستوى المحدّد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين

معادلتيهما : $x = \alpha$ و $x = e$. (هو أساس اللوغاريتم النيبيري).

- بيّن أنّ $\frac{1}{2}(e^2 - \alpha^2) - \ln(\alpha + 1) < \mathcal{A} < \frac{1}{2}(e - \alpha)(e + \alpha + 2)$.

الموضوع الثاني

يحتوي الموضوع الثاني على (03) صفحات (من الصفحة 4 من 6 إلى الصفحة 6 من 6)

التمرين الأول: (04 نقاط)

$$(1) \quad \alpha \text{ و } \beta \text{ عدنان طبيعيان بحيث: } \begin{cases} \alpha + \beta = 4035 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases}$$

- عيّن العددين α و β ، ثم بيّن أنّ العددين $\frac{\alpha}{2}$ و β أوليان فيما بينهما.

$$(2) \quad \text{عيّن كل الثنائيات الصحيحة } (x, y) \text{ التي تحقق المعادلة: } 1009x - 2017y = 1$$

$$(3) \quad \text{عيّن الأعداد الصحيحة } a \text{ التي تحقق الجملة: } \begin{cases} a \equiv 2019[2017] \\ a \equiv 2019[1009] \end{cases}$$

$$(4) \quad \text{أ) } n \text{ عدد طبيعي، ادرس تبعا لقيم } n \text{ بواقي القسمة الاقليدية للعدد } 7^n \text{ على } 9.$$

$$\text{ب) } L \text{ عدد طبيعي يكتب في النظام ذي الأساس } 7 \text{ كما يلي: } L = \underbrace{111\dots 1}_{2018 \text{ مرة}}$$

- عيّن باقي القسمة الاقليدية للعدد L على 42.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

كيس يحوي 9 كريات لا نفرق بينها باللمس موزعة كما يلي:

خمس كريات حمراء مرقمة بـ: 1، 1، 2، 2، 2 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: -3، 2، 3 وكريّة بيضاء مرقمة بـ: -1-
نسحب عشوائيا 4 كريات في آن واحد.

(1) احسب احتمال الحوادث التالية:

A : "الحصول على أربع كريات من نفس اللون".

B : "الحصول على كريّة بيضاء على الأكثر".

C : "الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم".

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات الخضراء المتبقية في الكيس.

أ) عيّن قيم المتغير العشوائي X ثم عرّف قانون احتماله .

ب) احسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X .

ج) احسب احتمال الحادثة: " $X^2 - X > 0$ ".

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(1) m عدد حقيقي ، نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2 + (m+1)z + (2m-1) = 0 \dots (E)$$

- عيّن قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة (E) حلين مركبين غير حقيقيين.

(2) نضع $m=3$ ، حل المعادلة (E).

(3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقاط A ، B ، C و E التي

لاحقاتها $z_A = -2+i$ ، $z_B = -2-i$ ، $z_C = \alpha$ و $z_E = \sqrt{3}$ ، حيث α عدد حقيقي و $\alpha > -2$.
- بين أن قيمة α التي يكون من أجلها المثلث ABC متقايس الأضلاع هي $(-2+\sqrt{3})$.

- نضع في كل ما يأتي $z_C = -2+\sqrt{3}$:

(4) اكتب العدد المركب: $\frac{z_C - z_E}{z_A - z_B}$ على الشكل الأسّي ثم استنتج أن:

(أ) المستقيمان (AB) و (EC) متعامدان.

(ب) النقاط A ، B و E تنتمي إلى نفس الدائرة (γ) التي يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

(5) ليكن r الدوران الذي يحول النقطة B إلى C و يحول C إلى A ، عبارته المركبة هي:

$$z' = az + \left(\frac{\sqrt{3}-6}{2} \right) + i \left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2} \right)$$

(أ) احسب العدد المركب a ثم استنتج زاوية الدوران r .

(ب) تحقق أن النقطة G مركز ثقل المثلث ABC هي مركز الدوران r .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = (1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}} - 1$.

(1) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $g'(x) = \frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$ ،

واستنتج اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$.

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.9 < \alpha < 1$ ،

و استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

II. الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{1}{x} + (1+x)e^{-\frac{1}{x}}$.

و (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(ب) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

واستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{-\frac{1}{x}} - x) = -1$ (يمكن وضع $t = -\frac{1}{x}$) ثم استنتج أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$

مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

(3) الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $h(x) = \frac{1}{x} - 1 + e^{-\frac{1}{x}}$.

أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ وادرس اتجاه تغير الدالة h واستنتج إشارة $h(x)$ على $]0; +\infty[$.

ب) تَحَقَّقْ أن $f(x) - x = (1+x)h(x)$ ثم استنتج الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

(4) ارسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) . (نأخذ $f(\alpha) \approx 1.73$).

(5) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بجدها العام u_n حيث: $u_n = \frac{n}{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n^2}{n+1}$.

أ) اكتب u_n بدلالة n ثم بيّن أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول u_1 .

ب) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = \left(\frac{1}{2} f(1) - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3} f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{4} f\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{n}{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}\right)$$