

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

يحتوي الموضوع الأول على 03 صفحات (من الصفحة 1 من 5 إلى الصفحة 3 من 5).

التمرين الأول: (04,5 نقطة)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

نعتبر النقط $A(1;1;0)$ ، $B(2;-1;1)$ ، $C(-1;0;1)$ ، $D\left(\frac{1}{2};2;-\frac{1}{2}\right)$ ، $E(0;1;1)$ ، $H\left(\frac{5}{4};\frac{7}{4};-\frac{1}{2}\right)$

و المستوي (P) المعرف بالتمثيل الوسيطى: $\begin{cases} x=1+\alpha+\beta \\ y=2-\alpha \\ z=-1+2\alpha-\beta \end{cases}$ ، α و β وسيطان حقيقيان.

(1) أ) بين أن النقط A ، B و C نعين مستويا.

ب) تحقق أن الشعاع $\vec{n}(1;3;5)$ ناظمي للمستوي (ABC) ثم اكتب معادلة ديكارتية له.

(2) أ) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) ثم بين أن المستويين (ABC) و (P) متقاطعان.

ب) نسمي (Δ) مستقيم تقاطع المستويين (ABC) و (P) .

- تحقق أن النقطة D تنتمي إلى المستقيم (Δ) و أن $\vec{u}(-3;1;0)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) .

ج) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) .

د) بين أن النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ) ثم استنتج المسافة بين A و (Δ) .

(3) G مرجح الجملة المثقلة: $\{(A,2);(B,-3);(C,2)\}$.

نسمي (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\vec{EM} \cdot \vec{GM} = 11$.

أ) عين إحداثيات النقطة G .

ب) اكتب معادلة ديكارتية للمجموعة (Γ) ثم بين أنها سطح كرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

ج) حدّد الوضعية النسبية للمستوي (ABC) و المجموعة (Γ) .

التمرين الثاني: (04,5 نقطة)

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما، حدودها موجبة تماما، حدّها الأول u_0 و أساسها q حيث: $\begin{cases} \ln(u_1) + \ln(u_2) = 11 \\ u_1 + u_2 = e^4(1+e^3) \end{cases}$

(1) احسب u_1 و u_2 ثم استنتج قيمة الأساس q .

(2) نضع: $u_1 = e^4$ و $q = e^3$.

أ) عبّر عن u_n بدلالة n .

ب) نضع: $S_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + \ln(u_2) + \dots + \ln(u_n)$ احسب S_n بدلالة n .

- (3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $a_n = n+3$.
 (أ) بين أن : $PGCD(2S_n, a_n) = PGCD(a_n, 14)$.
 (ب) عين القيم الممكنة لـ : $PGCD(2S_n, a_n)$.
 (ج) عين قيم الأعداد الطبيعية n التي من أجلها : $PGCD(2S_n, a_n) = 7$.
 (4) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7 .
 (5) نضع : $b_n = 3na_n - 2S_n + 1437^{2016} + 1$.
 عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $\begin{cases} b_n \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases}$.
 (6) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $(1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52)$ يقبل القسمة على 7 .
التمرين الثالث: (04,5 نقطة)

- (1) (أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 4z + 5 = 0$.
 (ب) استنتج حلول المعادلة ذات المجهول المركب z الآتية : $(z+1+i(1-\sqrt{3}))^2 - 4z + 1 - 4i(1-\sqrt{3}) = 0$.
 (2) θ عدد حقيقي حيث : $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ و z_0 عدد مركب طويلته 1 و θ عمدة له .
 (أ) اكتب العدد المركب $1+i\sqrt{3}$ على الشكل الأسّي .
 (ب) عين θ علما أن : $\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{z_0} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$. ($\overline{z_0}$ هو مرافق العدد المركب z_0) .
 (ج) n عدد طبيعي . من أجل قيمة θ المتحصل عليها ، اكتب العدد المركب $\left[\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{2} \right]^n$ على الشكل المثلثي .
 (د) عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $\left[\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{2} \right]^n$ عددا حقيقيا موجبا تماما .
 (3) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقط A, B, C التي لاحقاتها على الترتيب : z_A, z_B, z_C حيث : $z_A = 2-i$ ، $z_B = 2+i$ و $z_C = 1+i\sqrt{3}$.
 (أ) عين z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1); (B,-1); (C,1)\}$.
 (ب) استنتج أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .
 (ج) E النقطة من المستوي المركب ذات اللاحقة z_E حيث : $\begin{cases} \arg(z_E - z_A) - \arg(z_E - z_B) = \frac{\pi}{2} \\ \left| \frac{z_E - z_A}{z_E - z_B} \right| = 2 \end{cases}$.
 - بين أن : $z_E = \frac{14}{5} + \frac{3}{5}i$.
 - بين أن النقطة A هي صورة النقطة B بتشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميّزة .
 (4) M نقطة من المستوي المركب لاحقتها z ، النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$.
 (أ) عين z_I لاحقة النقطة I .
 (ب) α عدد حقيقي ، نسمي (Γ) مجموعة النقط M من المستوي المركب التي تُحقّق : $z - z_I = e^{i\alpha}$.
 - تحقّق أن النقطة E تنتمي إلى المجموعة (Γ) .
 - عين طبيعة المجموعة (Γ) و عناصرها المميّزة عندما يتغيّر α في $\mathbb{R}$.

التمرين الرابع: (06,5 نقطة)

(I) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = 1 + x^2 + 2 \ln x$.

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $]0,52; 0,53[$ حلاً وحيداً α .

(3) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = -x + \frac{3 + 2 \ln x}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

(2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$.

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة f .

ج) تحقق أن: $f(\alpha) = 2\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right)$ ثم عيّن حصراً له.

(3) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x]$ ثم فسّر النتيجة هندسياً.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى مستقيمه المقارب المائل (Δ).

ج) بين أن (C_f) يقبل مماساً (T) يوازي (Δ) يطلب كتابة معادلة ديكارتية له.

(4) نقبل أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما x_0 و x_1 حيث:

$$2,11 < x_1 < 2,13 \text{ و } 0,22 < x_0 < 0,23$$

أنشئ (T) ، (Δ) و (C_f).

(5) m وسيط حقيقي . ناقش بيانها و حسب قيم m ، عدد حلول المعادلة : $3 + 2 \ln x - mx = 0$.

(III) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $u_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} [f(x) + x] dx$.

(1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$.

(2) أعط تفسيراً هندسياً للعدد u_0 .

(3) احسب u_n بدلالة n .

(4) نضع: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$. احسب S_n بدلالة n .

الموضوع الثاني

يحتوي الموضوع الثاني على صفتين (الصفحة 4 من 5 والصفحة 5 من 5).

التمرين الأول: (05 نقاط)

- (1) الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط A, B, C و D حيث:

$$A(1;0;3), B(1;2;4), C(0;0;2) \text{ و } D(3;4;1).$$
 أ) عيّن العددين الحقيقيين α و β حتى يكون الشعاع $\vec{n}(2;\alpha;-\beta)$ ناظميا للمستوي (ABC) .
 ب) جد معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .
 (2) $z = 2 - x$ و $y = 2z - 2x - 4$ معادلتان ديكارتيتان للمستويين (P) و (Q) على الترتيب.
 أ) بيّن أنّ المستويين (P) و (Q) متعامدان.
 ب) أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P) و (Q) .
 ج) احسب المسافة بين النقطة D و المستقيم (Δ) .
 (3) (S) سطح الكرة التي مركزها D و مماس للمستوي (Q) .
 أ) اكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) .
 ب) جد الطبيعة والعناصر المميزة لتقاطع (P) و (S) .
 (4) λ عدد حقيقي، G_λ نقطة من الفضاء حيث: $2\vec{G}_\lambda\vec{A} - \vec{G}_\lambda\vec{B} + e^\lambda \vec{G}_\lambda\vec{C} = \vec{0}$. (e يرمز إلى أساس اللوغاريتم النيبيري).
 أ) عيّن (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تُحقّق: $\|2\vec{MA} - \vec{MB} + e\vec{MC}\| = 2\|2\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\|$ ($1+e$).
 ب) H مرجح الجملة $\{(A,2);(B,-1)\}$. اكتب $\vec{CG}_\lambda$ بدلالة $\vec{CH}$.
 ج) عيّن مجموعة النقط G_λ لما يتغيّر λ في المجموعة $\mathbb{R}$.
 د) جد قيمة λ التي تكون من أجلها G_λ منتصف القطعة $[CH]$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- (I) (1) حلّ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 2z + 2 = 0$.
 (2) جد العددين المركبين z_1 و z_2 حيث:
$$\begin{cases} 2z_1 - 3z_2 = 5i\sqrt{2} \\ z_1 + 3z_2 = -2i\sqrt{2} \end{cases}$$
- (II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. النقط A, B, C, D و H لاحتقاتها على الترتيب: $z_A = i\sqrt{2}$ ، $z_B = -i\sqrt{2}$ ، $z_C = 1+i$ ، $z_D = 1-i$ و $z_H = \frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}$ حيث E النقطة التي تُحقّق: $\vec{DE} = 2\vec{DO}$.
 (1) اكتب z_H على الشكل الأسّي و استنتج نوع المثلث BEC .
 (2) S تحويل نقطي في المستوي يرفق بكل نقطة M لاحتقتها z النقطة M' لاحتقتها z' حيث: $z' = z_A z + z_B$.
 أ) ما هي طبيعة التحويل S ؟ و ما هي عناصره المميزة؟
 ب) احسب مساحة الدائرة (γ) التي مركزها C و نصف قطرها CD .
 ج) عيّن (γ') صورة (γ) بالتحويل S و استنتج مساحتها.
 (3) عيّن (δ) مجموعة النقط M من المستوي (M) تختلف عن B و C ذات اللاحقات z التي يكون من أجلها العدد $\frac{z_B - z}{z_C - z}$ حقيقيا سالبا تماما.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

- (1) أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 3^n و 7^n على 11.
 ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $1437^{10n+4} + 2 \times 2016^{5n+4}$ مضاعف للعدد 11.
- (2) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x; y)$: $7x - 3y = 8$ ، حيث x و y عدنان طبيعيان.
 أ) حلّ المعادلة (E).
 ب) d القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) .
 - ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟
 - عيّن الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) من أجل $d = 4$.
 ج) جد الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق: $2016^{7x} + 1437^{3y} \equiv 0[11]$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- (I) φ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $\varphi(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x+1} - 1$.
 (1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$.
 ب) ادرس اتجاه تغير الدالة φ ثم شكّل جدول تغيراتها .
 (2) بيّن أنّ المعادلة $\varphi(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ ، حلّاً α يختلف عن 1 ثم تحقق أنّ: $2,79 < \alpha < 2,80$.
 (3) استنتج إشارة $\varphi(x)$ على $\mathbb{R}$.
- (II) f و g الدالتان العدديتان المرفقتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (2x - 1)e^{-x+1}$ و $g(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1}$.
 (1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها .
 (2) بيّن أنّ للمنحنيين (C_f) و (C_g) مماساً مشتركاً (T) في النقطة ذات الفاصلة 1 ثم جد معادلة له.
 (3) ارسم المماس (T) و المنحنى (C_f) .
 (4) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) - g(x) = \frac{(2x - 1)\varphi(x)}{x^2 - x + 1}$.
 ب) ادرس إشارة الفرق $f(x) - g(x)$ على $\mathbb{R}$ ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) .
 ج) باستعمال مكاملة بالتجزئة ، احسب بدلالة العدد الحقيقي x : $\int_1^x f(t) dt$.
 د) احسب مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = 1$ و $x = 2$.
- (III) 1) احسب $f''(x)$ ، $f^{(3)}(x)$ و $f^{(4)}(x)$. أعط تخميناً لعبارة $f^{(n)}(x)$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم.
 ($f^{(n)}$ الدالة المشتقة من المرتبة n للدالة f)
 (2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f^{(n)}(x) = (-1)^n [2x - (2n + 1)]e^{1-x}$.
 (3) (u_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، كما يلي: $u_n = f^{(n)}(1)$.
 أ) احسب بدلالة العدد الطبيعي غير المعدوم k ، المجموع : $u_k + u_{k+1}$.
 ب) استنتج بدلالة n ، المجموع : $u_1 + u_2 + \dots + u_{2n}$.

انتهى الموضوع الثاني