

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:  
الموضوع الأول

التمرين الأول: ( 04 نقاط )

- لتكن  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة كما يلي:  $u_0 = 1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3}$  ،  
و  $(v_n)$  المتتالية العددية المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $v_n = u_n + 4$  ،  
(1) بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها و حدّها الأول.  
(2) اكتب كلا من  $v_n$  و  $u_n$  بدلالة  $n$  .  
(3) ادرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  على  $\mathbb{N}$  .  
(4) احسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث:  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$  .  
(5) لتكن  $(w_n)$  المتتالية العددية المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي:  $w_n = 5\left(\frac{1}{v_n + 5} - 1\right)$  .  
أ) بين أن المتتالية  $(w_n)$  متزايدة تماما على  $\mathbb{N}$  .  
ب) احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - w_n)$  .

التمرين الثاني: ( 05 نقاط )

- الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  .  
نعتبر النقط  $A(2; -1; 1)$  ،  $B(-1; 2; 1)$  ،  $C(1; -1; 2)$  و  $D(1; 1; 1)$  .  
(1) أ) تحقق أن النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  تُعين مستويا.  
ب) بين أن  $\vec{n}(1; 1; 1)$  هو شعاع ناظمي للمستوي  $(ABC)$  .  
ج) اكتب معادلة ديكرتية للمستوي  $(ABC)$  .  
(2) لتكن النقطة  $G$  مرجح الجملة المثقلة  $\{(A; 1), (B; 2), (C; -1)\}$  .  
أ) احسب إحداثيات  $G$  .  
ب) لتكن  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M$  من الفضاء التي تحقق:  $\|\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}\| = 2\|\vec{MD}\|$  .  
بين أن  $(\Gamma)$  هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة  $[GD]$  .

- (ج) أثبت أن معادلة  $(\Gamma)$  هي :  $6x - 4y + 2z + 3 = 0$  .  
 (3) بين أن المستويين  $(ABC)$  و  $(\Gamma)$  يتقاطعان وفق مستقيم  $(\Delta)$  يُطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

### التمرين الثالث: ( 05 نقاط )

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة  $z^2 - 6\sqrt{2}z + 36 = 0$  .  
 (2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، لتكن النقاط  $A, B, C$  و  $D$  التي لاحقاتها على الترتيب :  $z_A = 3\sqrt{2}(1+i)$ ،  $z_B = \bar{z}_A$ ،  $z_C = 6\sqrt{2}$  و  $z_D = \frac{z_C}{2}$  .  
 أ) اكتب  $z_A, z_B$  و  $(1+i)z_A$  على الشكل الأسّي.  
 ب) احسب  $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$  .  
 (ج) بين أن النقاط  $O, A, B, C$  تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها  $D$ ، يطلب تعيين نصف قطرها.  
 د) احسب  $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$  ثم جد قياسا للزاوية  $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB})$ . ما هي طبيعة الرباعي  $OACB$  ؟  
 (3) ليكن  $R$  الدوران الذي مركزه  $O$  و زاويته  $\frac{\pi}{2}$  .  
 أ) اكتب العبارة المركبة للدوران  $R$  .  
 ب) عين لاحقة النقطة  $C'$  صورة  $C$  بالدوران  $R$  ثم تحقق أن النقاط  $A, C, C'$  في استقامية.  
 ج) عين لاحقة النقطة  $A'$  صورة  $A$  بالدوران  $R$  ثم حدد صورة الرباعي  $OACB$  بالدوران  $R$  .

### التمرين الرابع: ( 06 نقاط )

- نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = 1 + \frac{2\ln x}{x}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .  
 (1) أ) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ؛ فسر النتيجة هندسياً.  
 ب) ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  على المجال  $]0; +\infty[$  ثم شكّل جدول تغيراتها.  
 (2) أ) ادرس وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(\Delta)$  الذي معادلته:  $y = 1$  .  
 ب) اكتب معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  في النقطة ذات الفاصلة 1.  
 (ج) بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل في المجال  $]0; 1[$  حلاً وحيداً  $\sim$ ، حيث  $e^{-0.4} < \sim < e^{-0.3}$  .  
 (3) أنشئ  $(T)$  و  $(C_f)$  .  
 (4) لتكن الدالة  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \{0\}$  كما يلي:  $h(x) = 1 + \frac{2\ln|x|}{|x|}$  .  
 و ليكن  $(C_h)$  تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.  
 أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير معدوم،  $h(x) - h(-x) = 0$  . ماذا تستنتج ؟  
 ب) أنشئ المنحنى  $(C_h)$  اعتماداً على المنحنى  $(C_f)$  .  
 (ج) ناقش بياناً، حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$ ، عدد حلول المعادلة:  $\ln x^2 = (m-1)|x|$  .

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول: ( 04 نقاط )

- (I) نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية  $\mathbb{N}$  بحدها العام :  $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$  .  
 (  $e$  هو أساس اللوغاريتم النيبيري ) .  
 (1) بين أن  $(u_n)$  متتالية هندسية ، يُطلب تعيين أساسها و حدّها الأول .  
 (2) احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  ، ماذا تستنتج ؟  
 (3) احسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث :  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$  .  
 (II) نضع، من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $v_n = \ln(u_n)$  (  $\ln$  يرمز إلى اللوغاريتم النيبيري ) .  
 (1) عبّر عن  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج نوع المتتالية  $(v_n)$  .  
 (2) أ) احسب بدلالة  $n$  العدد  $P_n$  حيث :  $P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n)$  .  
 ب) عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي  $n$  بحيث :  $P_n + 4n > 0$  .

### التمرين الثاني: ( 05 نقاط )

- الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  ، نعتبر النقط  $A(1; -1; -2)$  ،  $B(1; -2; -3)$  و  $C(2; 0; 0)$  .  
 (1) أ) برهن أن  $A$  ،  $B$  و  $C$  ليست في استقامية .  
 ب) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي  $(ABC)$  .  
 ج) تحقق أن  $x + y - z - 2 = 0$  هي معادلة ديكارتية للمستوي  $(ABC)$  .  
 (2) نعتبر المستويين  $(P)$  و  $(Q)$  المعرفين بمعادلتيهما كما يلي:  
 $(P): x - y - 2z + 5 = 0$  و  $(Q): 3x + 2y - z + 10 = 0$  .  
 برهن أن  $(P)$  و  $(Q)$  يتقاطعان وفق المستقيم  $(\Delta)$  ذي التمثيل الوسيط:  $(t \in \mathbb{R}) : \begin{cases} x = t - 3 \\ y = -t \\ z = t + 1 \end{cases}$  .  
 (3) عيّن تقاطع المستويات  $(ABC)$  ،  $(P)$  و  $(Q)$  .  
 (4) لتكن  $M(x; y; z)$  نقطة من الفضاء. نسمي  $d(M, (P))$  المسافة بين  $M$  و المستوي  $(P)$  و  $d(M, (Q))$  المسافة بين  $M$  و المستوي  $(Q)$  ، عيّن المجموعة  $(\Gamma)$  للنقط  $M$  بحيث:  
 $\sqrt{6} \times d(M, (P)) = \sqrt{14} \times d(M, (Q))$  .

### التمرين الثالث: ( 04 نقاط )

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$  حيث:  
 $(z - i)(z^2 - 2z + 5) = 0$   
 (2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  (وحدة الطول  $1cm$ ) ، تعطى النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  التي لاحقاتها:  $z_A = i$  ،  $z_B = 1 + 2i$  و  $z_C = 1 - 2i$  على الترتيب .

- (أ) أنشئ النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$ .
- (ب) جد  $z_H$  لاحقة النقطة  $H$  المسقط العمودي للنقطة  $A$  على المستقيم  $(BC)$ .
- (ج) احسب مساحة المثلث  $ABC$ .
- (3) ليكن  $S$  التشابه المباشر الذي مركزه  $A$  و نسبته  $\frac{1}{2}$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$ .
- (أ) عيّن الكتابة المركبة للتشابه  $S$ .
- (ب) بيّن أن مساحة صورة المثلث  $ABC$  بالتشابه  $S$  تساوي  $\frac{1}{2}cm^2$ .
- (4)  $M$  نقطة لاحقتها  $z$ ، عيّن مجموعة النقط  $M$  حيث:  $|z| = |iz + 1 + 2i|$

#### التمرين الرابع: ( 07 نقاط )

- (I) - لتكن  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$ .
- (1) (أ) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ .
- (ب) ادرس اتجاه تغير الدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$  ثم شكّل جدول تغيراتها.
- (2) (أ) بيّن أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\sim$  حيث  $0,7 < \sim < 0,8$ .
- (ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي  $x$  إشارة  $g(x)$ .
- (II) - نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$ .
- (1) (أ) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .
- (ب) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
- (2) (أ) بيّن أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ :  $f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$ .
- (ب) استنتج أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا  $(\Delta)$  يُطلب تعيين معادلة له.
- (ج) ادرس الوضع النسبي للمنحنى  $(C_f)$  و  $(\Delta)$ .
- (3) (أ) بيّن أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ :  $f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$  حيث  $f'$  مشتقة الدالة  $f$ .
- (ب) استنتج إشارة  $f'(x)$  حسب قيم  $x$  ثم شكّل جدول تغيرات الدالة  $f$ . (نأخذ  $f(\sim) \approx -0,1$ )
- (4) احسب  $f(1)$  ثم حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة  $f(x) = 0$ .
- (5) أنشئ المستقيم  $(\Delta)$  و المنحنى  $(C_f)$ .
- (6) لتكن  $h$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $h(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$ .
- (أ) تمثيلها البياني في المعلم السابق.
- (ب) تحقق أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ :  $h(x) = f(x) - 2$ .
- (ب) استنتج أن  $(C_h)$  هو صورة  $(C_f)$  بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه، ثم أنشئ  $(C_h)$ .