

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر القطر: $A(2; 1; -1)$ ، $B(-1; 2; 4)$ ، $C(0; -2; 3)$ و $D(1; 1; -2)$ والمستوي (P) المعرف بالمعادلة الديكارتية: $2x - y + 2z + 1 = 0$ المطلوب: أجب بصحيح أو خطأ مع تبرير الإجابة في كل حالة من الحالات التالية:

(1) القطر A ، B و C تعين مستويا.

(2) المستقيم (AC) محتوي في المستوي (P)

(3) $x - 2y - z - 1 = 0$ هي معادلة للمستوي (ACD)

(4) $\begin{cases} x = 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 - 4t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$ هو تمثيل وسيطي للمستقيم (AC)

(5) المسافة بين النقطة D والمستوي (P) تساوي $\frac{3}{2}$

(6) النقطة $E(-2; -1; 1)$ هي المسقط العمودي للنقطة C على (P)

(7) سطح الكرة ذات المركز D و نصف القطر $\frac{\sqrt{6}}{2}$ هو مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة التالية: $(z - 1 - 2i)(z^2 - 2(1 + \sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3}) = 0$

(2) A ، B ، C و D نقط من المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ لاحتقاتها على الترتيب:

$$z_D = 1 - 2i \text{ و } z_C = 1 + \sqrt{3} - i, z_B = 1 + \sqrt{3} + i, z_A = 1 + 2i$$

(أ) بين أن: $AB = CD$ و (AD) يوازي (BC)

(ب) تحقق أن: $\frac{z_B + z_D}{2} \neq \frac{z_A + z_C}{2}$ ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$

$$(3) \text{ (أ) بين أن: } \frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{2}}$$

استنتج أن D هي صورة A بتشابه مباشر مركزه B يطلب تعيين نسبته وزاويته.

(ب) بين أن المثلث ADB قائم وأن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى دائرة يطلب تحديد مركزها ونصف قطرها.

(ج) استنتج إنشاءً للرباعي $ABCD$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(1) نعتبر المعادلة $(E): 2013x - 1962y = 54$ حيث x و y عدنان صحيحان .

(أ) احسب $PGCD(2013, 1962)$

(ب) استنتج أن المعادلة (E) تقبل حلولاً .

(ج) بين أنه إذا كانت الثنائية (x, y) حلاً للمعادلة (E) فإن: $x \equiv 0[6]$

(د) استنتج حلاً خاصاً (x_0, y_0) حيث $74 < x_0 < 80$ ثم حل المعادلة (E)

(2) نرمز بالرمز d إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث (x, y) حل للمعادلة (E)

(أ) ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟

(ب) عين قيم العددين الطبيعيين a و b حيث: $671a - 654b = 18$ و $PGCD(a, b) = 18$

التمرين الرابع: (06 نقاط)

(I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (2-x)e^x - 1$

(1) ادرس تغيرات الدالة g

(2) بين أن للمعادلة: $g(x) = 0$ في $\mathbb{R}$ حلان $\sim$ و حيث $-1,1 < \sim < -1,2$ و $1,8 < \sim < 1,9$

(3) لستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

(II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$. (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي

المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$ وفسر النتيجة هندسياً .

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - x)^2}$ ولستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) بين أن: $f(\sim) = \frac{1}{\sim - 1}$ واستنتج حصراً للعددين $f(\sim)$ و $f(\sim)$

(4) احسب $f(1)$ ثم ارسم المنحنى (C_f)

(5) a عدد حقيقي أكبر أو يساوي 1

(أ) احسب بدلالة a العدد $a(a)$ حيث: $a(a) = \int_1^a [f(x) - 1] dx$

(ب) احسب نهاية $a(a)$ عندما يؤول a إلى $+\infty$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

A و B النقطتان اللتان لاحتقاهما على الترتيب: $a = -2 + 6i$ و $b = -1 + 2i$

(1) اكتب العدد المركب $1+i$ على شكل أسي .

(2) S التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحتقتها z النقطة M' لاحتقتها z' حيث: $z' = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} z + 2$

(أ) D النقطة ذات اللاحقة d حيث $d = 2i$ ، جد لاحقة النقطة D' صورة D بالتحويل S . ماذا تستنتج؟

(ب) بين أن: $z' - d = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} (z - d)$ واستنتج طبيعة وعناصر التحويل S

(3) (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $3x + 5y = 11$

(أ) تحقق أن النقطة $M_0(-3; 4)$ تنتمي إلى (Δ) ثم عين نقط (Δ) التي إحداثياتها أعدادا صحيحة.

(ب) M'_0 صورة M_0 بالتحويل S . بين أن المستقيمين (BM'_0) و (BA) متعامدان.

(4) x و y عدنان صحيحان من المجال $[-5; 5]$. عين مجموعة النقط $M(x; y)$ من المستوي بحيث يكون

المستقيمان (BA) و (BM') متعامدين، حيث M' هي صورة M بالتحويل S

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

الدالة العددية f معرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{2x^2}{x+4}$. (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي

المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ كما هو مبين في الشكل أدناه.

(1) بين أن الدالة f متزايدة تماما.

(2) (U_n) المتتالية العددية المعرفة ب: $U_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = f(U_n)$

(Δ) المستقيم الذي معادلته $y = x$

(أ) باستعمال المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) مثل، على حامل محور الفواصل، الحدود: U_0, U_1, U_2, U_3 و U_4 دون حسابها.

(ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) وتقاربها.

(3) (أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq U_n \leq 3$

(ب) بين أن المتتالية (U_n) متناقصة .

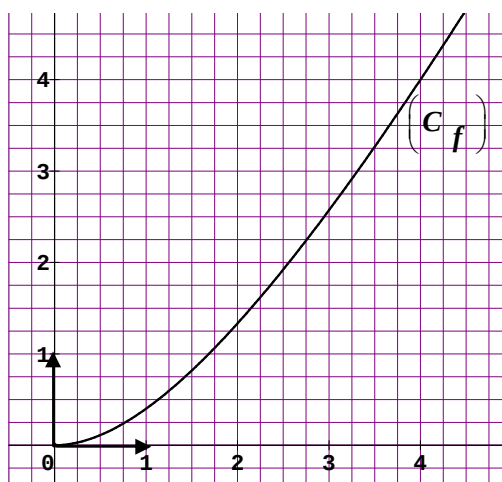
(ج) لستنتج أن (U_n) مقاربة.

(4) (أ) ادرس إشارة العدد $7U_{n+1} - 6U_n$ واستنتج أنه من أجل كل

عدد طبيعي n : $0 \leq U_{n+1} \leq \frac{6}{7}U_n$

(ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq U_n \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$

(ج) احسب نهاية المتتالية (U_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$



التمرين الثالث: (05 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. المستقيم الذي يشمل النقطة $A(1;1;3)$

$$\begin{cases} x+z=0 \\ y=3 \end{cases} \text{ و } \vec{u}(1;2;-2) \text{ شعاع توجيه له. } (\Delta') \text{ المستقيم المعروف بجملته المعادلتين:}$$

(1) جد تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمين (Δ) و (Δ')

(2) بين أن (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي.

(3) (P) المستوي الذي يشمل (Δ') و يوازي (Δ) . بين أن معادلة المستوي (P) هي: $2x + y + 2z - 3 = 0$

(4) $M(1+t; 1+2t; 3-2t)$ نقطة كيفية من المستقيم (Δ) ، حيث $t \in \mathbb{R}$. احسب d المسافة بين M والمستوي (P)

(5) أ) عيّن إحداثيات النقطة A' المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) ، ثم عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم

(Δ'') الذي يشمل A' ويوازي (Δ)

ب) بين أن (Δ') و (Δ'') يتقاطعان في النقطة $B(1;3;-1)$

(6) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(t) = BM^2$

أ) بين أن: $f(t) = 9t^2 - 24t + 20$

ب) بين أن f تقبل قيمة حدية صغرى $f(t_0)$ يطلب تعيين t_0 و $f(t_0)$

ج) تحقق أن $d = \sqrt{f(t_0)}$

التمرين الرابع: (05.5 نقاط)

(1) f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $f(x) = (1 + 2 \ln x)(-1 + \ln x)$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

أ) ادرس تغيرات الدالة f

ب) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة e (حيث e أساس اللوغاريتم النيبيري).

ج) عيّن فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل ثم ارسم (C_f) على المجال $]0; e^2]$

(2) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $g(x) = 1 - \ln x$

(C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) ادرس تغيرات الدالة g

ب) عيّن الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) ثم ارسم (C_g) على المجال $]0; e^2]$

(3) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $h(x) = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x$

أ) احسب $h'(x)$ واستنتج دالة أصلية للدالة: $x \mapsto (\ln x)^2$ على $]0; +\infty[$

ب) احسب العدد: $\int_{\frac{1}{e}}^e [f(x) - g(x)] dx$