

اختبار في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :
الموضوع الأول

التمرين الأول (04,5 نقط)

1 - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$z^2 - (1+2i)z - 1 + i = 0$$

نرمز للحلين بـ z_1 و z_2 حيث : $|z_1| < |z_2|$

بين أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي .

2 - المستوى منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. لتكن A, B و C نقط المستوي التي لاحقاتها

على الترتيب $1, z_1, z_2$.

ليكن Z العدد المركب حيث : $Z = \frac{z_2 - 1}{z_1 - 1}$

(أ) انطلاقا من التعريف $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ و من الخاصية : $e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2}$

برهن أن : $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$ و أن $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$ حيث θ, θ_1 و θ_2 أعداد حقيقية .

(ب) أكتب Z على الشكل الأسّي .

(ج) أكتب Z على الشكل المثلثي و استنتج أن النقطة C هي صورة النقطة B بتشابه مباشر مركزه A ،
يطلب تعيين زاويته و نسبته .

التمرين الثاني (04 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر المستوى (P) الذي معادلته :

$$x + 2y - z + 7 = 0$$

و النقط $A(2, 0, 1)$ و $B(3, 2, 0)$ و $C(-1, -2, 2)$.

1 - تحقق أن النقط A, B و C ليست على استقامة ، ثم بين أن المعادلة الديكارتيّة للمستوى (ABC)

$$y + 2z - 2 = 0$$

2 - أ - تحقق أن المستويين (P) و (ABC) متعامدان ، ثم عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع

(P) و (ABC) .

ب - احسب المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ) .

3 - لتكن G مرجح الجملة $\{(A, 1), (B, \alpha), (C, \beta)\}$ حيث β, α عدنان حقيقيان يحققان $1 + \alpha + \beta \neq 0$

عين α حتى تنتمي النقطة G إلى المستقيم (Δ) .

التمرين الثالث (04 نقط)

1) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I = [1, 2]$ بالعلاقة: $f(x) = \frac{x+2}{-x+4}$.

أ- بين أن الدالة f متزايدة تماما على I .

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I .

2) (u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يأتي:

$$u_0 = \frac{3}{2} \text{ و } u_{n+1} = f(u_n)$$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n ينتمي إلى I .

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة.

3) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$

ب) عين النهاية : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين الرابع (07,5 نقط)

I - نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[-2, +\infty[$ كما يأتي :

$$f(x) = (ax+b)e^{-x} + 1$$

حيث a و b عدنان حقيقيان.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ وحدة الطول $1cm$.

عين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1, 1)$ تنتمي إلى (C_f) و معامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

II - نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[-2, +\infty[$ كما يلي :

$$g(x) = (-x-1)e^{-x} + 1$$

و (C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ و فسر هذه النتيجة بيانيا. (نذكر أن $\lim_{u \rightarrow +\infty} ue^u = 0$)

ب) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها.

ج) بين أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين احداثياتها.

د) اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة I .

هـ) ارسم (C_g) .

و) H الدالة العددية المعرفة على $[-2, +\infty[$ كما يأتي: $H(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x}$ حيث α و β عدنان حقيقيان.

عين α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة : $x \mapsto g(x) - 1$

استنتج الدالة الأصلية للدالة g و التي تتعدم عند القيمة 0.

III) لتكن k الدالة المعرفة على المجال $[-2, +\infty[$ كما يأتي:

$$k(x) = g(x^2)$$

باستعمال مشتقة دالة مركبة، عين اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها.

الموضوع الثاني

التمرين الأول (03 نقط)

- لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد صحيح فقط . عيّن الجواب الصحيح معللا اختيارك.
 نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقطة:
 $D(3, 2, 1)$ ، $C(-2, 0, -2)$ ، $B(4, 1, 0)$ ، $A(1, 3, -1)$
 والمستوى (P) الذي معادلته: $x - 3z - 4 = 0$
 1) المستوى (P) هو : ج1) (BCD) ، ج2) (ABC) ، ج3) (ABD) .
 2) شعاع ناظمي للمستوي (P) هو :
 ج1) $\vec{n}_1(1, 2, 1)$ ، ج2) $\vec{n}_2(-2, 0, 6)$ ، ج3) $\vec{n}_3(2, 0, -1)$
 3) المسافة بين النقطة D والمستوى (P) هي :
 ج1) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ، ج2) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ، ج3) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

التمرين الثاني (05 نقط)

- (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي :
 $u_0 = \frac{5}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2$
 1) أ- ارسم في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ والمنحنى (d) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$
 ب - باستعمال الرسم السابق، مثل على حامل محور الفواصل و بدون حساب الحدود : u_4 و u_3, u_2, u_1, u_0
 ج - ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.
 2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 6$.
 ب - تحقق أن (u_n) متزايدة .
 ج - هل (u_n) متقاربة ؟ برّر إجابتك .
 3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 6$.
 أ - اثبت أن (v_n) متتالية هندسية بطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
 ب - اكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين الثالث (05 نقط)

1 . حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2 + iz - 2 - 6i = 0$$

2. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \bar{u}, \bar{v})$ النقطتين A و B اللتين

لاحقتهما z_A و z_B على الترتيب حيث :

$$z_B = -2 - 2i \quad \text{و} \quad z_A = 2 + i$$

عين لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$.

3. لتكن C النقطة ذات اللاحقة z_C حيث $z_C = \frac{4-i}{1+i}$.

اكتب z_C على الشكل الجبري ثم أثبت أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ) .

1.4 - برهن أن عبارة التشابه المباشر S الذي مركزه $M_0(z_0)$ ونسبته k ($k > 0$) وزاويته θ و الذي

يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي : $z' - z_0 = k e^{i\theta} (z - z_0)$

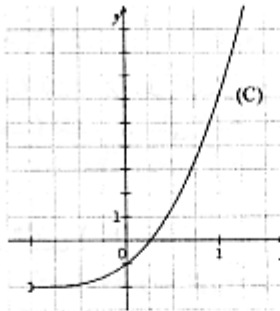
ب - تطبيق : عين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل S المعروف بـ : $z' + \frac{1}{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \left(z + \frac{1}{2}i \right)$.

التمرين الرابع (07 نقط)

المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كما يأتي :

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$$

1- أ - براءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة g و حدد $g(0)$ وإشارة $g\left(\frac{1}{2}\right)$.



ب) علل وجود عدد حقيقي α من المجال $]\frac{1}{2}, 1[$ يحقق : $g(\alpha) = 0$

ج) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$.

2 - f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بما يأتي :

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2}$$

و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O; \bar{i}, \bar{j})$.

أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$

حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f .

ب) عين دون حساب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ و فسر النتيجة بيانيا.

ج) احسب : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)]$ و فسر النتيجة بيانيا.

د) شكل جدول تغيرات الدالة f .

3 - نأخذ $\alpha = 0,26$

أ) عين مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2} .

ب) ارسم المنحنى (Γ)

4- أ) أكتب $f(x)$ على الشكل : $f(x) = x + a + \frac{b}{(x+1)^2}$ حيث a و b عدنان حقيقيان.

ب) عين F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ والتي تحقق : $F(1) = 2$

بالتوفيق